

Grenzwertformelsammlung

In der folgenden Tabelle werden in der ersten Spalte Grenzwertformeln genannt und in der zweiten Spalte die entsprechende Textstelle, an der die Formel begründet wird. Wenn nichts anderes gesagt wird, steht jedes in einer Ungleichung vorkommende (und nicht zuvor nach \mathbb{R} abgebildete¹) Symbol für eine reelle Zahl und jedes sonstige Symbol für eine komplexe Zahl.

<i>Formel</i>	<i>Begründung</i>
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0}{bx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^{m-n}; a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; a_i, b_j \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N}_0$	Bsp. 3.1.15a)
$\lim_{R \rightarrow \infty} R^k \cdot \max \left\{ \left \frac{p(z)}{q(z)} \right : z = R \right\} = 0, p, q \in \mathbb{C}[z], \text{grad}(q) - \text{grad}(p) > k \in \mathbb{Z}$	Bsp. 3.1.15b)
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 + a b^n} = 1; a_k > 0; a, a_i, b \in \mathbb{R}; b \leq 1; k \in \mathbb{N}_0$	Bsp. 3.2.12j)
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 + a b^n} = b; a_k > 0; a_i \in \mathbb{R}; a > 0; b \geq 1; k \in \mathbb{N}_0$	Bsp. 3.2.12k)
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$	Bsp. 3.2.12l)
$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty; \alpha > 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = 0; \alpha < 0$	Bsp. 3.4.12b) Bem. 5.2.12e)
$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \ln x = 0; \alpha < 0$	Bsp. 4.1.9c) Bem. 5.2.12e)
$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}; \alpha > 1$	Bsp. 4.1.18 Bem. 5.2.12e)
$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}; \alpha < 1$	Bsp. 4.1.18 Bem. 5.2.12e)
$\arccos(-1) = 2 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$	Def. 4.4.4 Bem. 4.4.5a)
$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$	Bsp. 4.1.14b) Bem. 4.4.5c)
$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} = \infty; \alpha \leq 1$	Bsp. 5.1.2b) Bsp. 5.1.2c)
$\sum_{n=0}^\infty z^n = \frac{1}{1-z}; z < 1$	Bsp. 5.1.2d)

1 Z.B. darf in der Ungleichung $|z| < 1$ die Zahl z durchaus in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ liegen.

Formel	Begründung
$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x x^\alpha = \infty ; \alpha \in \mathbb{R}$	Bem. 5.1.18b) Bem. 5.2.12e)
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x^n = 0 ; n \in \mathbb{Z}$	Bem. 5.1.18b)
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }$ bei Existenz des ersten Grenzwerts (mit ∞); $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	Bem. 5.2.4b)
$\lim_{n \rightarrow \infty} n^c z^n = 0 ; z < 1$	Bsp. 5.2.5a) Bem. 5.2.12e)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = \log(1+z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^{1+z} \frac{dw}{w} = z \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1+tz} ; z < 1$ mit \mathbb{C} -wertigem Integral $\int_0^1 \frac{dt}{1+tz} = \int_0^1 \frac{1+\Re(z)t}{1+2\Re(z)t+ z ^2t^2} dt - i \cdot \int_0^1 \frac{\Im(z)t}{1+2\Re(z)t+ z ^2t^2} dt$ gemäß Def. 4.2.10	Bsp. 5.2.10 Def. 5.2.11 Bem. 5.2.16e)
$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$	Bsp. 5.2.10a) Bem. 5.2.12c)
$\exp(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n, z \in \mathbb{C}$	Bsp. 5.2.10a) Bem. 5.2.12c)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \arctan z \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^z \frac{dw}{1+w^2} \stackrel{\text{def}}{=} z \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2 z^2} ; z < 1$	Bsp. 5.2.10b) Bsp. 5.4.9b)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (Spezialfall $x = \pi/2$ von Bsp. 5.3.16a); s.u.!)	Bsp. 5.2.10b)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$	Bsp. 5.2.10b)
$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} z^n = (1+z)^c = \exp\left(c z \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1+tz}\right) ; z < 1$	Def. 5.2.11 Satz 5.2.13
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = f(z) ; z, z_0 \in D$ für eine holomorphe Fkt. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$	Bem. 5.2.16c)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x ; x \in \mathbb{R}$	Satz 5.2.17
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x ; x \in \mathbb{R}$	Satz 5.2.17
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x ; x \in \mathbb{R}$ (Geometrie in Bsp. 5.2.9d))	Bsp. 5.2.2c)

Formel	Begründung
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x ; x \in \mathbb{R} \quad (\text{Geometrie in Bsp. 5.2.9d})$	Bsp. 5.2.2c)
$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(n\omega x) dx = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(n\omega x) dx ; \omega > 0 ; f \in C_p([a, b])$	Satz 5.3.8
$\int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(u(t-x)) dt \right) du = \frac{\pi}{2} (f(x-) + f(x+)) ; x \in \mathbb{R}$ für eine stückweise glatte Fkt. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$	Satz 5.3.11
$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ixu} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) du = \pi (f(x-) + f(x+)) ; x \in \mathbb{R}$ für eine stückweise glatte Fkt. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$	Satz 5.3.11
$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} ; \alpha > 0$	Bsp. 5.3.13
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{\pi}{4} ; 0 < x < \pi$	Bsp. 5.3.16a)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2} ; 0 < x < 2\pi$	Bsp. 5.3.16b)
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z / P} \left(\int_{z_0}^{z+z_0} f(w) e^{-2\pi i n w / P} dw \right) = P f(z) ; z, z_0 \in G ; P > 0 \text{ für eine holom. Fkt.}$ $f: G \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid a < \Im(2\pi z / P) < b\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } f(z+P) = f(z) ; z \in G$	Bem. 5.3.17a)
$\int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}} ; n \in \mathbb{N}_0 ; \Re(s) > 0$	Bem. 5.4.8g)
$\int_0^{\infty} \sin(at) e^{-st} dt = \frac{a}{s^2 + a^2} ; a \in \mathbb{R} ; \Re(s) > 0$	Bsp. 5.4.9a)
$\int_0^{\infty} \cos(at) e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + a^2} ; a \in \mathbb{R} ; \Re(s) > 0$	Bsp. 5.4.9a)
$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-st} dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^s \frac{dz}{1+z^2} ; \Re(s) > 0$	Bsp. 5.4.9a)
$\int_0^{\infty} \left(\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \cdot \int_0^{1/s} \frac{dz}{1+z^2} ; \Re(s) > 0$	Bsp. 5.4.9a)
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pi(x) \cdot \frac{\ln x}{x} \right) = 1 \text{ für die Anzahl } \pi(x) \text{ von Primzahlen kleiner } x$	Primzahlsatz in Anhang B